Introdução à teoria de jogos
- o que é a teoria de jogos

- ***O que é a Teoria dos Jogos?***

  Teoria dos jogos é a abordagem matemática moderna para conflitos de interesse, e geralmente é atribuída a John von Neumann em seus artigos de 1928 ("Zur Theorie der Gesellshaftsspiele") e 1937 ("A Model of General Economic Equilibrium"), embora Emile Borel tenha publicado antes, entre 1921 e 1927, quatro notas introduzindo os conceitos de estratégias puras e mistas e a solução minimax, a qual é fundamental para a teoria dos jogos. Entretanto, Borel considerou que o teorema minimax era em geral falso, apesar de tê-lo comprovado para casos especiais. Von Neumann provou o teorema para condições gerais e ainda criou a teoria dos jogos com mais de dois jogadores.

  Em 1944, von Neumann e o economista Oskar Morgenstern publicaram o livro clássico Theory of Games and Economic Behavior, apresentando o teorema minimax como solução para jogos de soma zero com dois jogadores, além da fundamentação da teoria da utilidade, a qual é muito útil para situações de incerteza em economia.

  Em 1950, baseado no trabalho de Melvin Dresher e Merrill Flood, Albert Tucker criou o Dilema do Prisioneiro, o mais conhecido problema na área de teoria dos jogos e aquele com maior influência
  nas ciências sociais.

- Entre 1950 e 1953, John Nash publicou quatro artigos importantes para a teoria de jogos não cooperativos e para a teoria de barganha. Em Equilibrium Points in N-Person Games (1950) e Non-cooperative Games (1951), Nash provou a existência de um equilíbrio estratégico para jogos não cooperativos - o equilíbrio de Nash - e sugeriu uma abordagem de estudo de jogos cooperativos a partir de sua redução para a forma não cooperativa. Nos artigos
- The Bargaining
  problem e Two-Person Cooperative Games, criou a teoria de barganha e provou a existência da solução de barganha de Nash.

Introdução à teoria de jogos
- características do jogo -

. Há pelo menos dois jogadores

. **Jogada** é a maneira segundo a qual o jogo progride de um estágio a outro. Podem ser alternadas entre os jogadores de uma forma especificada ou ocorrer simultaneamente. Uma jogada consiste de uma decisão de um dos participantes ou de um resultado de um evento probabilístico.

. No fim do jogo, cada jogador obtém um **payoff**. Podemos associar este número ao montante que foi ganho ou perdido, ou dizer, por exemplo, que o payoff é +1 para o ganhador, 0 se há um empate, e -1 para o perdedor.

Uma **estratégia** é uma lista das escolhas ótimas para um jogador. Nesta lista já estão previstas todas as possíveis situações que o jogador poderá enfrentar. Assim, tendo uma estratégia, ele saberá o que fazer em qualquer estágio, não importando o que seu oponente faça nem os resultados dos eventos probabilísticos.

Introdução à teoria de jogos
- Classificação dos jogos

- Jogos de Soma Zero: São aqueles em que a soma dos payoffs dos jogadores é zero, ou seja, um jogador só pode ganhar se o outro perder, assim como no pôquer, xadrez, entre outros. É a este tipo de jogo que se aplica o teorema minimax.

- Jogos de Soma Não-zero: São os que não possuem a propriedade acima, como o Dilema do Prisioneiro, em que o payoff total é 2 anos de prisão se ambos ficam em silêncio e 4 anos se os dois prisioneiros confessam.

- Jogos de Informação Perfeita: São aqueles em que todas as jogadas são conhecidas por todos os participantes envolvidos. Assim, o xadrez é um jogo com informação perfeita, enquanto o pôquer simplificado não pode ser classificado como tal, já que B não tem conhecimento sobre a carta que A escolhe, a primeira jogada.

Introdução à teoria de jogos

-*Exemplo de um jogo de soma zero com dois jogadores*

Duas empresas concorrentes produzem um mesmo produto e têm custos fixos de Euros 5000,00 por período, independente de quanto conseguem vender. Ambas competem pelo mesmo mercado e devem escolher entre um preço alto (Euros 2,00) e um preço baixo (Euros 1,00). Regras do jogo:

- A Euros 2,00, o mercado consome 5000 unidades ao custo de Euros 10000,00
- A Euros 1,00, o mercado consome 10000 unidades ao custo de Euros 10000,00
- Se ambas empresas aplicarem o mesmo preço, vendas serão divididas entre elas
- Se aplicarem preços diferentes, aquela com menor preço vende toda a quantidade e a outra nada
- Payoffs são os lucros - revenda menos custos fixos

Matriz de payoffs

	EMPRESA 1		
EMPRESA 2		**Euros 1**	**Euros 2**
	Euros 1	(0,0)	(5000, -5000)
	Euros 2	(-5000, 5000)	(0,0)

-Exemplo de um jogo de soma zero com dois jogadores

- Em cada uma das estratégias, o primeiro número indica o ganho da Empresa 1, enquanto que o segundo representa o ganho da Empresa 2. Para todas as estratégias possíveis do jogo, a soma de ganhos (payoffs) dos jogadores é zero, caracterizando um jogo de soma zero. A solução para estes jogos é a aplicação do teorema minimax de von Neumann.

  Teorema Minimax
  Em um jogo de dois jogadores com soma zero, é racional para cada jogador escolher a estratégia que maximiza seu ganho mínimo, ou, de forma equivalente, que minimiza o ganho máximo do outro. O par de estratégias tal que cada jogador maximiza seu payoff mínimo é a "solução" do jogo.

  No exemplo acima, o raciocínio para a empresa 1 é o seguinte: o payoff mínimo para o preço Euros 1,00 é zero, e para o preço Euros 2,00 é -5000, logo o preço Euros 1,00 maximiza o payoff mínimo. O raciocínio da empresa 2 é similar, e a solução do jogo é a escolha do preço Euros 1,00 para ambas. Neste exemplo, o jogo apresenta somente uma solução, a qual será jogada 100% das vezes, caracterizando uma estratégia pura.

-Exemplo de um jogo de soma zero com estratégias mistas

- Considerar dois jogadores, cada um com duas alternativas de escolha: par ou ímpar. Dependendo a combinação de escolhas dos dois, os jogadores obtêm ganho (representado por 1) ou perda (-1). O jogador Par obterá ganho se ambos fizerem a mesma escolha, e neste caso Ímpar receberá -1. e as escolhas forem diferentes, os ganhos invertem-se.

PAYOFF MATRIX

-

	JOGADOR 1		
JOGADOR 2		**PAR**	**IMPAR**
	PAR	(1,-1)	(-1, 1)
	IMPAR	(-1, 1)	(1, -1)

Introdução à teoria de jogos
-*Exemplo de um jogo de soma zero com estratégias mistas*

- Neste exemplo, os jogadores podem usar duas estratégias, pois o payoff mínimo para cada uma é -1. Existe ainda uma terceira estratégia possível, envolvendo aleatoriedade. Um jogador pode variar sua escolha seguindo probabilidades aplicadas a cada uma das opções, caracterizando estratégias mistas. A solução do exemplo apresenta então duas estratégias puras - par e ímpar - e uma série de estratégias mistas correspondendo às variações de probabilidade possíveis. O teorema minimax garante uma solução para jogos de soma zero, seja em estratégia pura ou mista. Neste caso, a solução é jogar aleatoriamente par e ímpar com probabilidades iguais de 0,5, pois esta estratégia maximiza o payoff mínimo sobre todas as outras estratégias, puras ou mistas.

  O cálculo do payoff envolvendo estratégias mistas leva em conta o percentual associado a cada estratégia, os quais são representados em n-tuplas, sendo n o número de estratégias puras que o jogador dispõe. O somatório de todos os percentuais logicamente deve totalizar 1, equivalente a 100%. Para encontrar a estratégia mista ótima, maximizando o payoff do jogador, é preciso obter as porcentagens ótimas para cada estratégia. Abaixo está demonstrado como foram encontrados os percentuais 0,5 do exemplo acima.

Cálculo dos valores percentuais óptimos do jogo par ou ímpar

- Raciocínio para o jogador 1 (equivalente para jogador 2)

  - estratégia deve ser óptima contra ambas as jogadas de Ímpar, ou seja, a soma dos payoffs contra a estratégia "par" deve ser igual à soma dos mesmos contra a estratégia "ímpar" do jogador Ímpar.

  Considerando que x é o percentual ótimo para a estratégia "par" e 1-x é o percentual ótimo para a estratégia "ímpar",

  $x.1 + (1-x).-1$ é a soma dos payoffs contra a estratégia "par", e

  $x.-1 + (1-x).1$ é a soma dos payoffs contra a estratégia "ímpar"

  Então, $x.1 + (1-x).-1 = x.-1 + (1-x).1$

  $x - 1 + x = -x + 1 - x$

  $4x = 2$

  $x = 0,5 = 50\%$. Logo, $1-x = 0,5 = 50\%$ também. Cada estratégia deve ser escolhida 50% das vezes para que o jogador consiga um payoff mínimo de -1/2. Usando uma estratégia pura neste caso, o payoff mínimo seria -1.

Introdução à teoria de jogos
Outro exemplo de estratégia mista

- Um outro exemplo de estratégia mista ocorre no jogo de pôquer, no qual é melhor nãofazer “bluff” sempre, nem dizer sempre a verdade. Há problema em usar estratégia mista quando o jogo não é repetido, pois neste caso será seleccionada uma estratégia pura.

  Em jogos de soma zero com dois jogadores, é possível mostrar na matriz somente os payoffs de um jogador e considerar que os payoffs do outro são o inverso, uma vez que sua soma é zero. Considera-se, então, que o primeiro jogador busca maximizar seu payoff mínimo, enquanto que o segundo procura minimizar o payoff máximo do primeiro (equivalente a maximizar seu payoff mínimo). A matriz para o jogo par ou ímpar seria então a seguinte:

Introdução à teoria de jogos
Outro exemplo de estratégia mista

	JOGADOR 1		
JOGADOR 2		**PAR**	**IMPAR**
	PAR	(1)	(-1)
	IMPAR	(-1)	(1)

Introdução à teoria de jogos

Jogos dominantes e dominados

- Jogos podem apresentar estratégias dominadas, as quais racionalmente nunca são escolhidas, pois oferecem um payoff menor do que outra(s) em qualquer situação, independente da estratégia dos outros jogadores. Estas estratégias dominadas podem ser removidas do jogo, simplificando-o sem alterar sua solução.

- A matriz de payoff abaixo, por exemplo, representa um jogo de soma zero com dois jogadores e mais de duas estratégias para cada um. Algumas das estratégias são dominadas e podem ser retiradas. É importante notar que a matriz apresenta somente os payoffs de I.
- Assim, as estratégias dominadas de I são aquelas que oferecem sempre menor payoff, independente da jogada de e II, enquanto que as estratégias dominadas de II são as que oferecem maior payoff para I em qualquer situação.

Introdução à teoria de jogos

Jogos dominantes e dominados

-

	EMPRESA II					
EMPRESA I		II1	II2	II3	II4	II5
	I1	4	5	6	4	4
	I2	4	2	3	4	4
	I3	2	4	5	5	5

Introdução à teoria de jogos

Jogos dominantes e dominados

- - As estratégias II4 e II5 são iguais, portanto I5 pode ser eliminada (ou I4)

  - A estratégia II1 domina a estratégia II4, pois oferece sempre um payoff menor para I, portanto II4 pode ser eliminada

  - A estratégia II2 domina a estratégia II3, portanto II3 pode ser eliminada

  - A estratégia I1 domina a estratégia I2, pois oferece sempre um payoff maior para I, portanto I2 pode ser eliminada

  Restam as estratégias I1 e I3 para I e II1 e II2 para II.

  Solução do jogo: I joga I1 e II joga II1, com payoff 4 para I e -4 para II

Introdução à teoria de jogos

- Conclusão

- A solução apresentada por von Neumann está limitada a problemas de soma zero, que não correspondem à maioria dos conflitos de interesse, principalmente em decisões econômicas e sociais. Jogos nestas áreas costumam apresentar somas não constantes, e são chamados jogos de soma não zero.

- Esta restrição foi vencida pelo trabalho de John Nash durante a década de 50. Atualmente, busca-se o equilíbrio de Nash, ou seja, um conjunto tal de estratégias usadas pelos jogadores em um jogo que, para cada agente i, dadas as estratégias dos demais jogadores, i não tem incentivo para mudar sua estratégia (quer dizer que i escolheu a melhor estratégia, dadas as estratégias dos demais). De acordo com Nash, todo jogo de soma não zero com dois jogadores apresenta pelo menos um equilíbrio, em estratégia pura ou mista.

- Equilíbrios de Nash são estáveis, mas nem sempre desejáveis; o Dilema do Prisioneiro, por exemplo, que é a instância de jogo mais conhecida e discutida, apresenta como único equilíbrio uma situação na qual ambos os jogadores obtêm um mau resultado, dadas suas funções de utilidade.

Introdução à teoria de jogos

- Dilema do prisioneiro

- Neste jogo, dois ladrões são presos próximo à cena de um roubo e precisam escolher entre duas estratégias: confessar o roubo, implicando também o companheiro, ou não confessar na expectativa de reduzir sua pena.
- A matriz de payoff abaixo mostra os ganhos possíveis para cada estratégia escolhida pelos jogadores (na verdade são perdas, e maximizar o payoff neste caso implica em obter a menor pena). Considerando que ambos os ladrões têm conhecimento da matriz, para cada um o raciocínio é o mesmo: se o outro confessar, é melhor confessar também, pois assim fica preso 9 anos ao invés de 10. Se o outro não confessar, também assim é melhor confessar, pois então sairá livre.
- Desta forma, confessar é a estratégia dominante para cada jogador, e o equilíbrio do jogo é encontrado nas estratégias dominantes. Sendo racionais, os jogadores optarão por confessar, obtendo ambos payoff de -9.
- Entretanto, se agissem irracionalmente, poderiam obter um resultado melhor, pagando uma pena de um só ano de prisão. Este é um jogo não cooperativo, ou seja, os jogadores não estão preocupados em obter o melhor resultado em conjunto, mas sim o melhor ganho individual que puderem.

Introdução à teoria de jogos

- Dilema do prisioneiro

	PRISIONEIRO Ii		
PRISIONEIRO I		**CONFESSA**	**NÃO CONFESSA**
	CONFESSA	(-9, -9)	(0, -10))
	NÃO CONFESSA	(-10, 0)	(-1, -1)

Introdução à teoria de jogos

- Dilema do prisioneiro

- O facto de acções racionais individuais levarem a um mau resultado em termos de interesse próprio é o motivo da importância deste dilema em questões sociais. É importante observar que o Dilema do Prisioneiro é uma simplificação de conflitos reais, e várias modificação podem ser aplicadas a ele:
- repetição de interacções
- aumento do número de jogadores - jogos *não cooperativos* com mais de 2 jogadores são uma generalização dos jogos com 2 jogadores, e todo jogo de **n** jogadores (**n** finito) tem pelo menos um equilíbrio